

Chapitre 7 : Trigonométrie

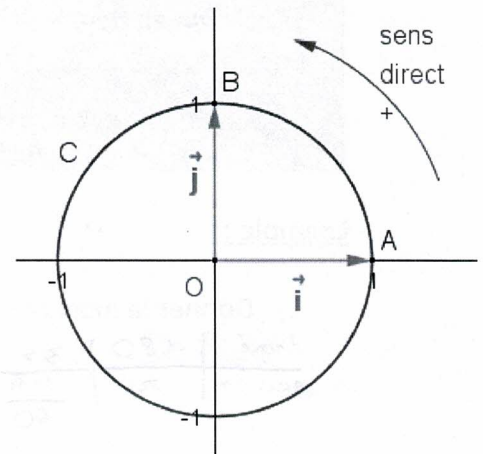
I. Cercle trigonométrique et radian

1) Le cercle trigonométrique

Définition : Sur un cercle, on appelle **sens direct**, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

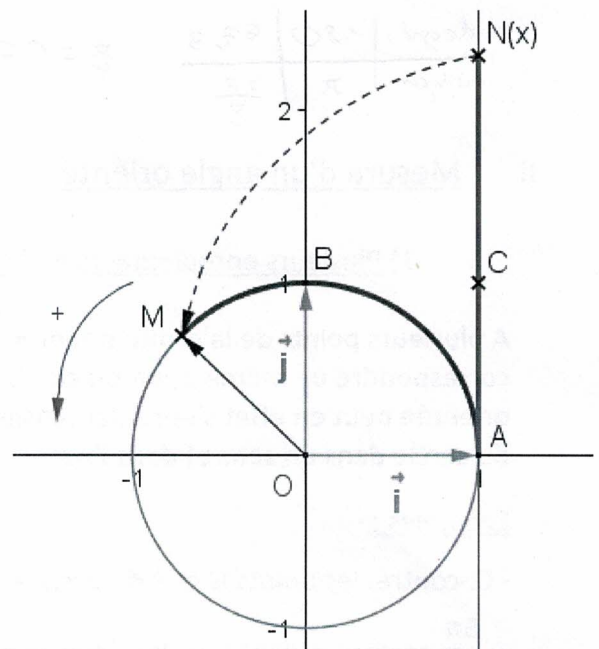


2) Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A ; \vec{j})$ soit un repère de la droite.

Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.



3) Le radian

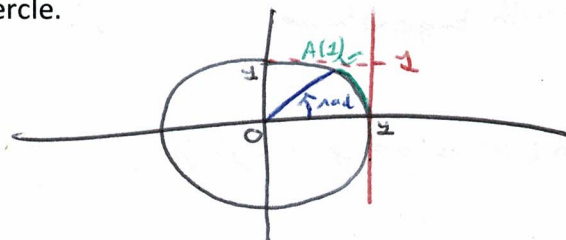
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π .

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π .

On définit alors une nouvelle unité d'angle : le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition : On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360° .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exemple :

- 1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 33° .

$$\begin{array}{c|c|c} \text{degré} & 180 & 33 \\ \hline \text{radian} & \pi & \frac{11\pi}{60} \end{array} \quad \alpha = \frac{11\pi}{60}$$

- 2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

$$\begin{array}{c|c|c} \text{degré} & 180 & 67,5 \\ \hline \text{radian} & \pi & \frac{3\pi}{8} \end{array} \quad \beta = 67,5^\circ$$

II. Mesure d'un angle orienté

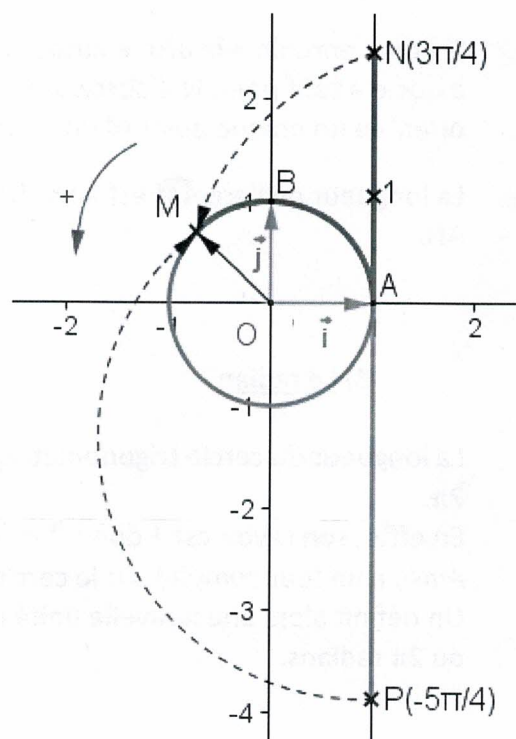
1) Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

Exemples :

- Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

$$\text{En effet : } \frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$



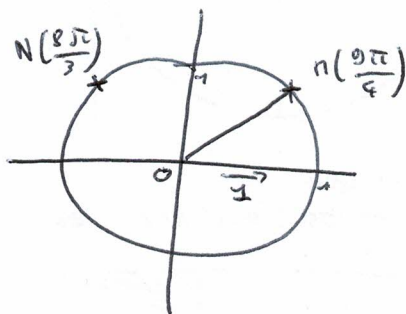
Remarque : 2 nombres réels x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique si $x - y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs (entiers positifs et négatifs)

Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique

1) Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.

2) Placer sur le cercle trigonométrique, le point N tel que l'angle $(\vec{i}; \overrightarrow{ON})$ mesure $\frac{8\pi}{3}$ rad.



$$1) \frac{9\pi}{4} - 2\pi = \frac{9\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

9π et $\frac{\pi}{4}$ ont le même point image et $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$$2) \frac{8\pi}{3} - 2\pi = \frac{8\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

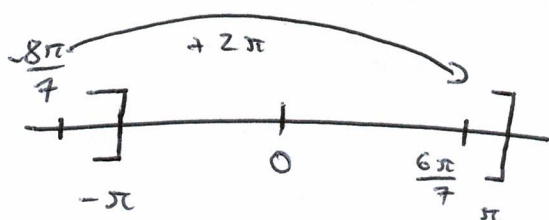
$$\text{et } \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

2) Mesure principale d'un angle orienté

Définition : La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Exemple :

Donner la mesure principale des angles orientés $-\frac{8\pi}{7}$ et $\frac{23\pi}{4}$ *on cherche un nombre dans la table de 8 + module de 23.*



$$-\frac{8\pi}{7} + 2\pi = -\frac{8\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{6\pi}{7} \in]-\pi; \pi]$$

Donc $\frac{6\pi}{7}$ est la mesure principale de $-\frac{8\pi}{7}$

$$\frac{23\pi}{4} - 6\pi = -\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$$

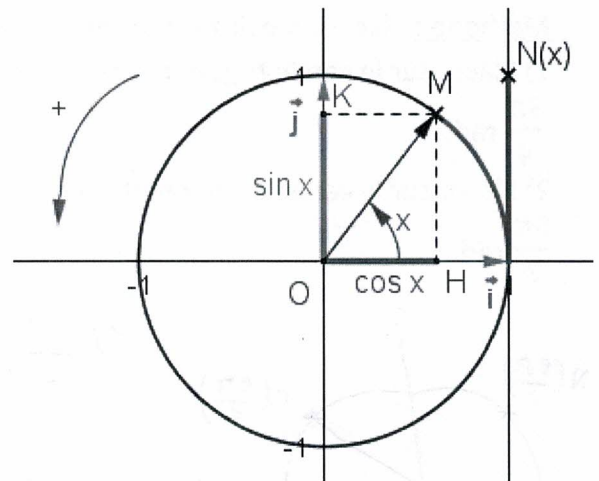
III. Cosinus et sinus d'un angle

1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O .

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x .

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique. On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M .



Définitions :

- Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note $\cos(x)$
- Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin(x)$

2) Propriétés :

Propriétés :

- 1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$
- 2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- 3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$
- 4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
- 5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Remarque : $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2(x)$

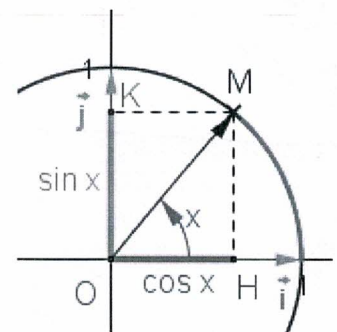
Démonstrations :

- 1) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, le point image de x est sur le cercle de centre O et de rayon 1.

Donc ces coordonnées sont comprises entre -1 et 1.

- 2) OMH est rectangle en H ;
d'après le théorème de Pythagore :
 $OM^2 = OH^2 + MH^2$

$$\Leftrightarrow 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$$



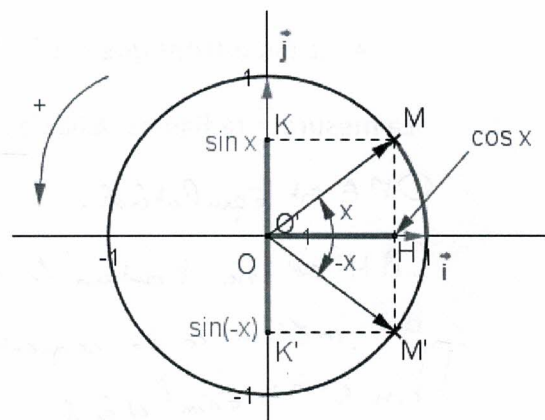
3) n représente x et n' représente $-x$.

n' est l'image de n par la symétrie d'axe $(O; i)$
donc n et n' ont la même abscisse et les ordonnées opposées.

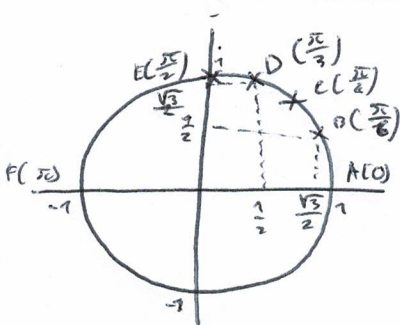
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

4) et 5) $\forall x \in \mathbb{R}, x$ et $x + 2k\pi$ ont le même point image sur le cercle.

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(x + 2k\pi) \\ \sin(x) = \sin(x + 2k\pi) \end{cases}$$



3) Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus :



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstrations au programme :

- Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45° .

POH est un triangle isocèle rectangle en H .

D'après le théorème de Pythagore :

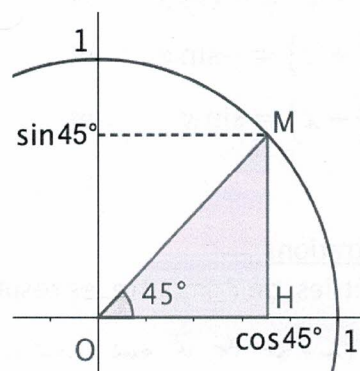
$$OH^2 = OH^2 + PH^2$$

$$\Rightarrow 1 = PH^2 + PH^2 \text{ car } POH \text{ est isocèle en } H$$

$$\Rightarrow 1 = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



- Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est égale à la mesure 60° .

$\triangle OMA$ est équilatéral.

(MH) est une hauteur de $\triangle OMA$ mais aussi une médiatrice du segment $[OA]$

car $\triangle OMA$ équilatéral

$$OH = \frac{1}{2} OA \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ car } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$$

4) Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés :

Pour tout nombre réel x , on a :

$$1) \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$2) \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$4) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Démonstrations :

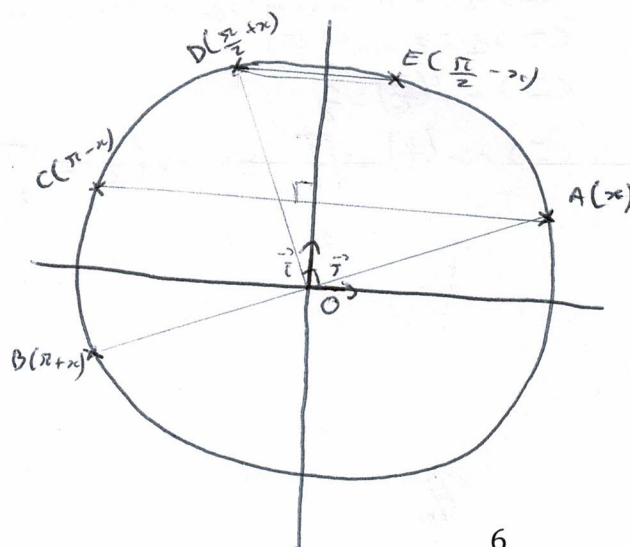
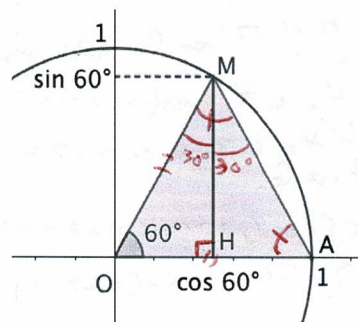
Par symétries, on démontre les résultats :

1) $B(\pi + x)$ est l'image de $A(x)$ qui représente x par symétrie de centre O . Donc les coordonnées de B sont la opposées de celles de $A(x)$.

2) $C(\pi - x)$ est l'image de $A(x)$ par symétrie d'axe (OS) donc $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

3) $D\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ est l'image de $A(x)$ par rotation d'angle 90° dans le sens trigonométrique et de centre O .
Donc $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

4) pareil que la 3 mais en sens inverse



Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

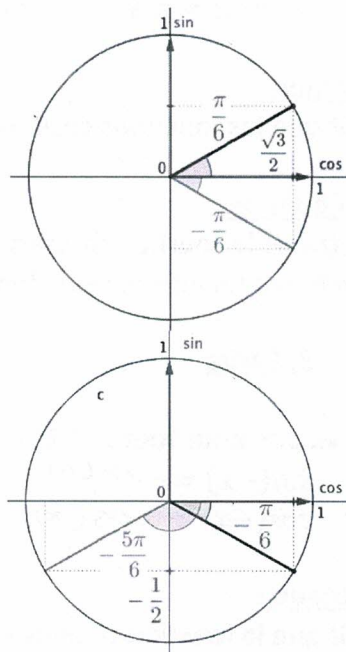
a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$

a) $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}, x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

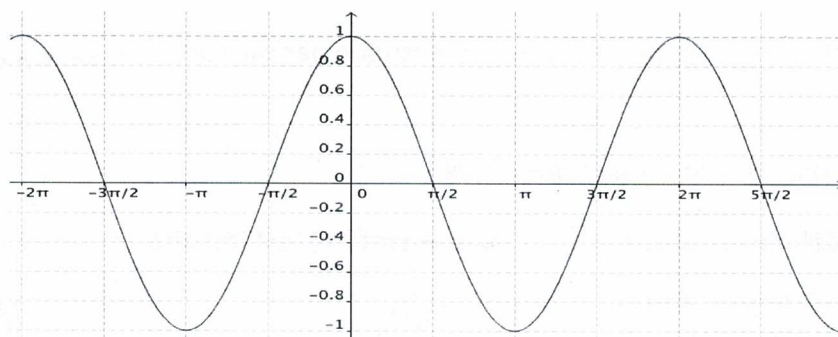
b) $\sin(x) = -\frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

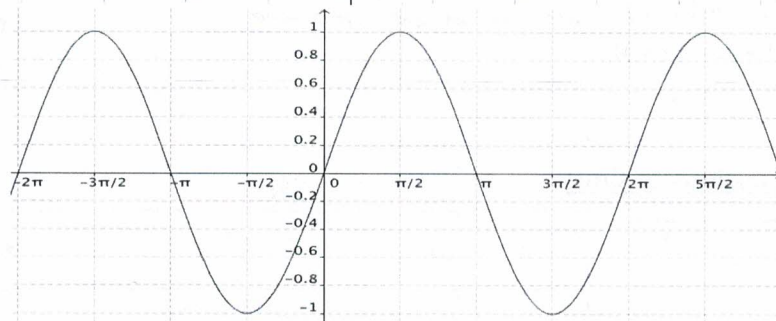


IV. Fonctions cosinus et sinus

1) Représentations graphiques



$$x \mapsto \cos(x)$$



$$x \mapsto \sin(x)$$

2) Périodicité

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
- $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Remarque :

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont *périodique de période 2π*

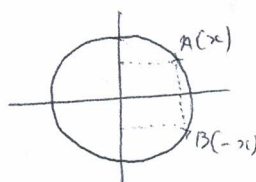
Conséquence :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

3) Parité

On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$



$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Remarque :

On dit que la fonction cosinus est *paire* et la fonction sinus *impaire*

Conséquences :

- La courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- La courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine

Méthode : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x - \sin(2x)$ est impaire.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) &= \sin(-x) - \sin(-2x) \\ &= -\sin(x) + \sin(2x) \quad \text{car sinus est impaire} \\ &= -(\sin(x) - \sin(2x)) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{impaire :} \\ f(-x) &= -f(x) \\ \text{paire :} \\ f(-x) &= f(x) \end{aligned}$$

4) Variations des fonctions cosinus et sinus

x	0	π
$\cos x$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0